

## DIAGNOSIS KESALAHAN PENALARAN MATEMATIS SISWA DALAM MENYELESAIKAN MASALAH POLA BILANGAN

Nur Indha Permata Sari, Subanji, Erry Hidayanto

Universitas Negeri Malang

Email : [nur.sari2@gmail.com](mailto:nur.sari2@gmail.com)

### Abstract

*The purpose of this study is to describe students' mathematical reasoning errors in solving problems of number patterns. This type of research is descriptive qualitative research. The research subjects were class VII students of SMP Negeri 1 Pogalan Trenggalek who were selected based on errors in diagnostic tests and communication skills. Research data was collected through tests and interviews. The research data is a sheet of student answers through initial tests (diagnostic tests). Data analysis activities are (1) processing and preparing data for analysis, (2) reading the entire data, (3) analyzing in more detail by coding data, (4) applying coding processes, (5) showing how mathematical descriptions and reasoning errors presented in qualitative reports and (6) interpreting data. The results showed that errors experienced by SP I, SP II, and SP III subjects in solving number pattern problems were (1) detecting order in a pattern, (2) formulating patterns from spherical arrangements, and (3) determining the number of balls in the  $n$ th term.*

**Keywords:** diagnosis, mathematical reasoning

Submit : 16 Juli 2017, Publish: Oktober 2018

## PENDAHULUAN

Pada dasarnya proses pembelajaran matematika berkaitan erat dengan pembentukan dan penggunaan kemampuan berpikir. Peserta didik akan mudah menerima atau mengolah informasi ilmu pengetahuan, apabila di dalam dirinya sudah ada skema berpikir, sehingga ketika mereka berhadapan dengan suatu masalah matematika, maka dengan mudah menempatkan, mengelola, menyusun serta menggunakan alur yang logis. Peretz (2006) dalam penelitiannya menyatakan bahwa yang dibutuhkan siswa pertama kali dalam proses penalaran yaitu merasa “butuh” untuk bernalar, untuk mengembangkan sikap penalarannya, atau kebiasaan berpikir. Walaupun guru mereka mengajarkan ketrampilan bernalar, “bagaimana” bernalar dengan algoritma atau seperti yang dikatakan Selden dan Selden (1995) sebagai ritual/rutin.

Pembelajaran yang efektif hendaknya tidak meminta siswa untuk menghafal, namun belajar memecahkan masalah, menyusun hipotesis, dan kemudian menguji kebenarannya. NCTM membagi standar proses pembelajaran matematika menjadi lima yaitu pemecahan masalah, penalaran dan bukti, komunikasi, koneksi, dan representasi. Penalaran matematis yang juga tertuang dalam Permendiknas No.22 tahun 2006 tentang standar isi, merupakan salah satu dari kompetensi yang harus dimiliki oleh peserta didik. Materi matematika dan penalaran merupakan dua hal yang tidak dapat dipisahkan. Materi matematika dipahami melalui penalaran dan penalaran dipahami serta dilatihkan melalui belajar materi matematika, berarti kemampuan penalaran matematis sangat penting dan dibutuhkan dalam mempelajari matematika.

Penalaran dalam matematika banyak macamnya, diantaranya penalaran deduktif, penalaran induktif, penalaran aljabar, penalaran nalogis, dan lain-lain. Penalaran induktif dalam matematika sering dijumpai pada berbagai materi, salah satunya adalah materi pola bilangan. Materi pola bilangan diberikan pada siswa kelas VII semester ganjil dalam kurikulum 2013. Siswa dapat menggunakan penalaran induktif untuk mencari hubungan matematika melalui belajar pola (NCTM, 2000: 262). Berdasarkan pemaparan di atas dapat dikatakan bahwa belajar pola bilangan dapat melatih kemampuan penalaran matematis siswa. Melalui pola bilangan, dalam hal ini pola mencari rumus fungsi dari  $N$  ke  $R$ , siswa akan belajar menemukan keterkaitan antar suku dalam suatu pola untuk menentukan rumus suku ke- $n$  dan kemudian menguji kebenarannya.

Dalam pembelajaran di sekolah, tentu terdapat sejumlah siswa yang berhasil dan kurang berhasil dalam proses pembelajaran. Salah satu faktor yang mempengaruhi rendahnya hasil belajar siswa antara lain siswa cenderung menghafal dan didril dalam proses pembelajaran, bukan mendapatkan proses pembelajaran yang berjalan secara bermakna. Dalam proses belajar mengajar, masih banyak pengajar matematika yang mengajarkan prosedur dengan tanpa menjelaskan mengapa prosedur tersebut digunakan (Subanji, 2007: 2). Hal ini mengakibatkan siswa bekerja secara prosedural tanpa memahami matematika secara penalaran. Hal ini menimbulkan anggapan siswa bahwa dalam menyelesaikan masalah, cukup memilih prosedur penyelesaian

yang sesuai dengan masalah yang diberikan. Penekanan pembelajaran pada prosedur mengakibatkan penalaran siswa tidak berkembang secara optimal. Berdasarkan hasil observasi peneliti di SMP Negeri 1 Pogalan pada tanggal 30 Oktober 2015 didapatkan informasi bahwa siswa kelas VII masih mengalami kesulitan dalam materi pola bilangan yang terbukti dengan adanya kesalahan yang dibuat siswa dalam mencari pola bilangan. Hal ini didukung dari hasil wawancara peneliti dengan salah satu guru kelas VII SMP Negeri 1 Pogalan yang menyatakan bahwa rata-rata hasil belajar siswa pada materi pola bilangan khususnya di kelas VII-J adalah 71. Saat mengerjakan soal pola bilangan, baik dalam kuis maupun ulangan harian kebanyakan siswa mengalami kesalahan dalam menentukan pola atau suku ke- $n$  dalam suatu pola bilangan, yaitu diketahui siswa menuliskan rumus yang salah bahkan ada yang tidak menuliskan rumusnya. Berdasarkan hasil uji pendahuluan yang dilakukan peneliti pada tanggal 26 November 2015 juga menunjukkan bahwa siswa masih mengalami kesulitan dalam mencari rumus pola bilangan yang ditandai dengan kesalahan dalam mengerjakan soal yang berkaitan dengan pola bilangan. Kesalahan penalaran siswa lain dalam menyelesaikan masalah pola bilangan ditunjukkan dengan tidak adanya siswa yang mampu menuliskan rumus suku ke- $n$  untuk soal yang diberikan. Pada kenyataannya rumus suku ke- $n$  ini merupakan acuan utama untuk menentukan suku-suku lain. Salah satu indikator kemampuan penalaran matematis adalah kemampuan siswa dalam menentukan generalisasi dari pola tersebut dan dapat menguji kebenarannya. Beberapa penelitian telah menunjukkan kesulitan siswa dalam penalaran matematis maupun melakukan generalisasi pola di semua tingkatan kelas (Chazan, 1993; Harel & Sowder, 1998; Healy & Hoyles, 2000; Hoyles & Kuchemann, 2002; Bieda dkk, 2009; Lannin, 2005; Stacey, 1989; Sasman dkk, 1999).

Bagi seorang guru, sangatlah perlu untuk mengetahui kesulitan yang dialami oleh siswa dalam proses belajarnya. Kesulitan dapat dilihat dari kesalahan yang dilakukan dalam menyelesaikan masalah pada soal yang diberikan. Penelusuran terhadap kesalahan merupakan usaha yang harus dilakukan untuk meningkatkan hasil belajar matematika peserta didik (Subanji, dkk. 1993). Permasalahan yang tidak segera diatasi akan berakibat pada kurangnya pemahaman siswa pada topik matematika selanjutnya yang lebih tinggi. Hal ini mengakibatkan terjadinya akumulasi ketidakmampuan siswa karena kompleksnya permasalahan dalam menguasai konsep matematika.

Penelitian tentang menganalisis kesulitan dan kesalahan penalaran siswa telah dilakukan oleh beberapa peneliti (Gal, 2010; Duval, 2006; Barbosa, 2007; Mason, 2005; Irpan, 2009). Gal (2010) melakukan penelitian tentang menganalisis kesulitan geometri dengan perspektif persepsi visual. Duval (2006) melakukan penelitian tentang menganalisis kesulitan siswa dalam pemahaman matematika dengan menentukan fungsi kognitif yang mendasari keragaman proses matematika. Barbosa (2007) melakukan penelitian untuk menganalisis strategi dan kesulitan siswa kelas 6 dalam menggeneralisasi pola serta peran yang dimainkan oleh visualisasi di penalaran mereka. Mason (2005) mempromosikan penggunaan strategi 'Perhatikan Apa yang Anda Lakukan' kepada peserta didik untuk menarik kasus lebih lanjut dari pola. Irpan (2009) melakukan penelitian tentang proses terjadinya kesalahan dalam penalaran proporsional berdasarkan kerangka kerja asimilasi dan akomodasi.

Tujuan penelitian ini adalah untuk mendeskripsikan bentuk kesalahan penalaran matematis siswa dalam menyelesaikan masalah pola bilangan.

## METODE

Pendekatan penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif. Pemilihan pendekatan ini karena penelitian ini memenuhi ciri-ciri penelitian kualitatif yaitu: a) dilakukan dalam kondisi yang alamiah, langsung ke sumber data dan peneliti adalah instrumen kunci/ utama, b) penelitian kualitatif lebih bersifat deskriptif, data yang terkumpul berbentuk kata-kata atau gambar, sehingga tidak menekankan pada angka, c) penelitian kualitatif lebih menekankan pada proses daripada produk atau *outcome*, d) penelitian kualitatif melakukan analisis data secara induktif, e) penelitian kualitatif lebih menekankan makna (Sugiyono, 2008:13). Data yang diperoleh dalam penelitian ini adalah data verbal. Oleh karenanya, jenis penelitian ini termasuk penelitian kualitatif deskriptif.

Penelitian ini dilaksanakan di SMPN 1 Pogalan Kabupaten Trenggalek. Subjek penelitian adalah siswa kelas VII di sekolah tersebut, yaitu siswa yang sudah mempelajari konsep pola bilangan untuk tingkat SMP. Penentuan subjek penelitian ini juga mempertimbangkan kemungkinan kelancaran komunikasi siswa dalam mengemukakan gagasannya. Data observasi kelas yang menjadi fokus dalam penelitian ini yakni kelas VII-J karena siswa kelas tersebut sudah mendapatkan pokok bahasan pola bilangan dan masukan guru matematika kelas VII. Peneliti melakukan tes awal (tes diagnostik) yaitu berupa dua masalah pola bilangan. Dari hasil tes awal (diagnostik) tersebut peneliti menetapkan subjek penelitian yaitu siswa yang mengalami kesalahan penalaran.

Penelitian ini dilakukan dalam dua tahap yaitu tahap studi pendahuluan dan tahap pelaksanaan. Tahap studi pendahuluan meliputi pelaksanaan wawancara dengan guru matematika mengenai pembelajaran, memberikan tes uji pendahuluan, dan menganalisis hasil uji pendahuluan. Pada tahap pelaksanaan dilakukan tes awal, mengoreksi dan menganalisis hasil tes awal, menentukan subjek penelitian, serta wawancara.

Data yang akan dikumpulkan dalam penelitian ini, berupa kata-kata, kalimat dalam bentuk narasi yang mendeskripsikan tentang kesulitan penalaran siswa dalam belajar menyelesaikan masalah pola bilangan. Data yang didapatkan meliputi nilai ulangan harian materi pola bilangan, lembar hasil jawaban siswa pada tes awal (tes diagnostik) yang diberikan oleh peneliti, rekaman wawancara subjek penelitian setelah menyelesaikan lembar tugas.

Instrumen yang digunakan untuk memperoleh data dalam penelitian ini yaitu peneliti sebagai instrumen utama, instrumen lembar tugas, pedoman wawancara, serta alat perekam. Data penelitian dikumpulkan melalui tes dan wawancara. Menurut Creswell (2014: 276) langkah-langkah analisis yang digunakan dalam pendekatan kualitatif adalah (1) Mengolah dan mempersiapkan data untuk dianalisis, (2) Membaca keseluruhan data, (3) Menganalisis lebih detail dengan meng – *coding* data, (4) Terapkan proses *coding*, (5) Tunjukkan bagaimana deskripsi dan tema-tema ini akan disajikan kembali dalam narasi/laporan kualitatif serta (6) Menginterpretasi atau memaknai data.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

Penelitian ini dilaksanakan dalam dua tahap yaitu tahap studi pendahuluan dan tahap pelaksanaan.

### Tahap Studi Pendahuluan

Pada tahap studi pendahuluan, hal-hal yang dilakukan peneliti yaitu (1) melaksanakan wawancara dengan guru matematika yang mengajar di kelas VII-J SMP Negeri 1 Pogalan mengenai kegiatan pembelajaran, serta mencari informasi mengenai hasil belajar matematika khususnya materi pola bilangan, (2) memberikan soal tes pendahuluan materi pola bilangan kepada siswa kelas VII-J guna mengetahui keterbatasan siswa dalam materi pola bilangan serta untuk memperkuat latar belakang penelitian, dan (3) menganalisis hasil uji pendahuluan.

### Tahap Pelaksanaan

Pada tahap pelaksanaan, hal-hal yang dilakukan peneliti adalah (1) menyusun tes awal (tes diagnosis), (2) mengadakan tes awal, (3) mengoreksi dan menganalisis hasil tes awal, (4) menentukan subjek penelitian, dan (5) wawancara dengan subjek penelitian untuk mengetahui secara mendalam kesulitan siswa dalam menyelesaikan masalah pola bilangan

### Kesalahan Penalaran Siswa

Berdasarkan hasil penelitian, ditemukan bentuk kesalahan penalaran matematis siswa dalam menyelesaikan masalah pola bilangan pada soal nomor satu adalah sebagai berikut. Pertama adalah kesalahan dalam mendeteksi keteraturan dari susunan bola. Seperti halnya penelitian yang dilakukan oleh Stacey (1989) dimana sejumlah besar subjek mengalami kesalahan dikarenakan menggunakan metode proporsi langsung dalam upaya menggeneralisasi. SP I dan SP II selalu memulai menyelesaikan masalah dengan menuliskan kembali banyaknya bola pada setiap susunan dalam bentuk bilangan. SP I dan SP II tidak pernah melihat pola keteraturan dengan mengobservasi susunan bola. Akibatnya SP I dan SP II mengalami kesalahan dalam mendeteksi keteraturan susunan bola pada soal pertama. Ketika peneliti meminta siswa menjelaskan keteraturan susunan bola dengan melihat soal, SP I tetap tidak mampu menjelaskan keteraturannya. Hal yang dilakukan SP I setelah menulis kembali dalam bentuk bilangan yaitu mencari selisih antar dua bilangan yang berurutan. Selanjutnya SP I memasukkan selisih yang dia dapat tersebut ke dalam rumus yang menurutnya sudah ada di buku. Ketika peneliti menanyakan asal rumus itu, SP I tidak dapat menjelaskan darimana asalnya. Menurut Bieda dkk (2014) hal awal yang dilibatkan dalam penalaran matematis yaitu kemampuan menentukan pola dan struktur untuk mendeteksi keteraturan. Orang-orang yang bernalar dan berpikir analitis cenderung untuk mencatat pola, struktur, atau keteraturan dalam kedua situasi dunia nyata dan objek simbolik; mereka bertanya apakah pola-pola yang disengaja atau jika mereka terjadi karena suatu alasan; dan mereka menduga dan membuktikan (NCTM, 2000: 56).

Sementara itu SP III berbeda dengan SP I dan SP II. SP III memulai menyelesaikan masalah nomor 1 dengan tidak menuliskan kembali banyaknya bola pada setiap susunan dalam bentuk bilangan. SP III memiliki cara yang berbeda dalam merepresentasikan banyaknya bola pada setiap susunan. Dia kembali menggambarkan susunan-susunan bola nya dalam lembar jawabannya. SP III tidak menuliskan keterkaitan antara banyaknya bola pada setiap susunan. SP III menunjukkan bahwa pertambahannya terletak pada sisi atas, bawah, kanan, dan kiri. SP III dapat melihat keteraturannya namun siswa mengalami kesalahan dalam menemukan pola susunannya. Berdasarkan hal ini terlihat bahwa SP III sudah mulai menggunakan

penalarannya walaupun kurang tepat. Berdasarkan NCTM (2000:262), penalaran matematis terjadi salah satunya ketika siswa mampu merumuskan dugaan tentang keteraturan yang diobservasi.

Kedua, bentuk kesalahan siswa dalam menyelesaikan masalah pola bilangan adalah merumuskan pola susunan berdasarkan keteraturan yang telah diobservasi. Hal ini ditunjukkan dengan ketidakmampuan siswa menentukan banyaknya bola pada susunan kelima, kesepuluh, dan keseratus. SP I langsung menggunakan rumus untuk menyelesaikan soal pada bagian b) yaitu menentukan banyaknya bola pada susunan ke-5, ke-10, dan ke-100. Namun ketika ditanyakan darimana rumus itu berasal siswa tidak dapat menjelaskan. SP I menjelaskan bahwa rumus sudah diberikan oleh guru dan mereka dapat secara langsung menggunakannya hanya dengan mengetahui selisih antara setiap susunan bola. Bahkan SP I tidak menyadari bahwa rumus yang dia tuliskan sebelumnya adalah banyak bola pada susunan ke- $n$ .

SP II juga menyadari bahwa selisih antara dua susunan yang berurutan adalah 4. Siswa menentukan suku kelima dengan cara menambahkan suku keempat dengan bilangan 4. Namun untuk menentukan banyaknya bola pada susunan ke-10 siswa mengalami kesalahan. Hal ini dikarenakan siswa masih menghitung secara manual yaitu dengan menambahkan bilangan 4 secara terus menerus. Akibatnya siswa mengalami kesalahan penghitungan dikarenakan bilangan yang terlalu besar.

SP III bekerja berbeda dengan subjek-subjek penelitian yang lain. SP III sudah mulai menggunakan penalarannya dalam menentukan suku kelima, kesepuluh, dan keseratus, namun dia mengalami kesalahan. SP III menuliskan bahwa banyaknya bola pada susunan kesepuluh adalah banyak bola pada susunan kelima ditambah  $4 \times 6$ . Sebenarnya penalarannya sudah hampir benar namun ada kesalahan yaitu ketika siswa sudah mulai menghitung dari susunan kelima seharusnya dia hanya perlu menambah dengan bilangan 4 sebanyak 5 kali. Banyaknya bola pada susunan keseratus adalah banyak bola pada susunan kesepuluh ditambah dengan  $4 \times 10$ .

Ketiga, bentuk kesalahan yang dialami siswa dalam menyelesaikan masalah pola bilangan adalah menentukan banyak bola pada susunan ke- $n$  atau siswa menyebutnya dengan  $U_n$ . SP I selalu berfokus pada pola bilangan dengan selisih yang sama. Padahal tidak semua pola bilangan membentuk pola selisih yang sama. Setelah menemukan selisih antara dua bilangan yang berurutan, SP I sama sekali tidak mengetahui apa itu  $U_n$ . Padahal dalam mencari banyaknya bola pada susunan kelima dan kesepuluh dia langsung menerapkan rumus yang diperoleh dari guru walaupun penerapannya kurang tepat. Namun, yang mengherankan, dia tidak menyadari bahwa rumus yang dia tuliskan sebelumnya adalah banyak bola pada susunan ke- $n$ . Kesalahan seperti ini disebabkan oleh ketidaktahuan siswa akan konsep  $n$  itu sendiri. Siswa tidak mengetahui bahwa  $n$  adalah sebarang bilangan asli. Bahkan saat peneliti menanyakan apa sebenarnya  $n$  itu siswa menjawab bahwa  $n$  itu rumus.

Sementara itu, untuk SP II dan SP III mereka menyampaikan bahwa mereka tidak bisa mencari banyaknya bola pada susunan ke- $n$ . SP III menuliskan  $4n - 3$  pada lembar jawabannya. Tapi ketika ditanyakan dia tidak tahu asal rumus itu dari mana. SP III hanya mengatakan bahwa rumus itu didapatnya dari buku.

Tidak hanya pada soal nomor 1 peneliti juga menemukan kesalahan yang dialami siswa pada soal nomor 2. Sama seperti soal nomor 1, kesalahan pertama yang dialami siswa adalah kesalahan dalam mendeteksi keteraturan dalam susunan bola. SP I dan SP II tidak bisa menemukan keteraturan dari pola soal nomor 2, sedangkan SP III bisa menyadari bahwa pola soal nomor 2 terdiri dari susunan bola biru dan merah walaupun penyelesaiannya masih belum tepat.

SP I dan SP II memulai menyelesaikan masalah nomor 2 dengan menuliskan kembali banyaknya bola pada setiap susunan dalam bentuk bilangan. SP I dan SP II kembali mencari selisih antara dua bilangan yang berurutan. Setelah dia menemukan bahwa pola tersebut tidak memiliki selisih yang sama, maka dia kembali mencari selisih antara dua selisih yang pertama. Berdasarkan jawaban di atas terlihat bahwa mereka selalu mendeteksi keteraturan melalui selisih antar dua bilangan. Mereka tidak pernah melihat pola keteraturan melalui gambar susunan bola. Ketika peneliti menanyakan keteraturan dengan melihat susunan bola pada soal, mereka tidak bisa mengungkapkan secara lisan bagaimana keteraturannya. SP I dan SP II tidak menyadari bahwa perbedaan warna yaitu merah dan biru pada susunan bola membentuk pola sendiri-sendiri. Dia selalu melihat susunan tersebut menjadi satu kesatuan. Berdasarkan percakapan tersebut, terlihat bahwa mereka tidak bisa melihat keteraturan melalui observasi melihat pola. Dia tidak bisa menyadari bahwa dalam pola selalu memiliki keteraturan, dan keteraturan itu tidak serta merta selalu dalam bentuk selisih.

Sementara itu SP III dapat melihat susunan bola ke dalam susunan bola merah dan biru. SP III sudah memiliki konsep akan pola bilangan yang dapat dikatakan lebih baik daripada dua subjek lainnya. Kesalahan yang dimiliki SP III adalah ketidakmampuan menemukan keteraturan dari susunan bola merah. Siswa belum bisa melihat bahwa susunan bola merah merupakan pola bilangan persegi yang dimulai dari  $2 \times 2$  selanjutnya  $3 \times 3$  dan seterusnya.

Kesalahan kedua yang dialami subjek dalam menyelesaikan soal nomor 2 adalah merumuskan pola dengan melihat keteraturan yang telah diobservasi sebelumnya. Thompson (2012) dalam penelitiannya menyatakan bahwa ketika siswa mampu menggunakan keteraturan suatu pola untuk menentukan suku selanjutnya maka dia mampu memunculkan penalarannya. SP I dapat menentukan bola pada susunan kelima dengan cara menggambar. Namun karena terlalu besar bilangannya dia tidak mampu mengurut sampai pada susunan kesepuluh. Dalam hal ini dia berupaya menggunakan rumus yang didapat dari buku walaupun penerapannya salah. Sementara SP II dan SP III mengalami kesalahan dalam menentukan pola susunannya. SP II mengartikan bahwa banyaknya bola akan bertambah terus menerus dengan kelipatan 2, mengingat bahwa selisih teraturnya adalah 2. Terlihat bahwa siswa sudah mulai menggunakan penalarannya walaupun penalarannya belum berjalan secara benar.

Kesalahan yang ketiga adalah menentukan banyak bola pada susunan ke- $n$ . SP I menggunakan rumus  $U_n = an^2 + bn + c$  untuk menentukan banyaknya bola pada susunan ke- $n$  walaupun penerapannya masih salah. SP I hanya menghafalkan rumus dan bekerja secara prosedural. Hal ini mengakibatkan siswa tidak memahami matematika secara penalaran. Siswa tidak terbiasa bernalar untuk menyelesaikan sendiri masalahnya. Sementara SP II dan SP III sama sekali tidak mampu menuliskan jawabannya. Lagi-lagi siswa tidak mengerti apa sebenarnya  $n$  itu.

Bentuk kesalahan penalaran matematis siswa dalam menyelesaikan masalah pola bilangan dapat dilihat pada Tabel 1 berikut ini.

Tabel 1. Bentuk kesalahan penalaran matematis siswa	
Subjek	Bentuk kesalahan
SP I dan SP II	Mendeteksi keteraturan dalam susunan bola
SP I dan SP II	Merumuskan pola susunan berdasarkan keteraturan yang telah diobservasi
SP II dan SP III	Menentukan banyak bola pada susunan ke- $n$

Dari Tabel 1 di atas dapat diketahui bentuk kesalahan penalaran matematis yang dilakukan oleh subjek penelitian, SP I, SP II, dan SP III. Bentuk kesalahan penalaran matematis dalam mendeteksi keteraturan dalam suatu pola dilakukan oleh SP I dan SP II, bentuk kesalahan penalaran matematis dalam merumuskan pola susunan berdasarkan keteraturan yang telah diobservasi dilakukan oleh SP I dan SP II, sedangkan bentuk kesalahan penalaran matematis dalam menentukan banyak bola pada susunan ke- $n$  dilakukan oleh SP II dan SP III.

## PENUTUP

Bentuk kesalahan penalaran matematis SP I, SP II, dan SP III dalam menyelesaikan masalah pola bilangan yaitu (1) belum bisa mendeteksi keteraturan dalam suatu pola, (2) belum mampu merumuskan pola dari susunan-susunan bola, (3) salah dalam menentukan banyaknya bola pada suku ke- $n$  atau lebih akuratnya subjek menyebut dengan suku ke- $n$  yang dilambangkan dengan  $U_n$ .

## DAFTAR RUJUKAN

- Barbosa, A. Palhares, P. & Vale, I. 2007. Patterns and Generalization: The Influence of Visual Strategies. *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 2007: 844-851.
- Bieda, K. N., Drwencke, J., & Picard, A. 2014. Reasoning and Proving Opportunities in Elementary Mathematics Textbooks. *International Journal of Educational Research*, 64: 71-80.
- Broza, O & Ben, Y. 2010. The Effect of Using a Video Clip Presenting a Contextual Story on Low-Achieving Students' Mathematical Discourse. *Educational Studies in Mathematics*.
- Chazan, D. 1993. High School Students' Justification for the Irrefutation of Empirical Evidence and Mathematical Proof. *Educational Studies in Mathematics*, 24(4): 359-387.
- Cresswell, J.W. 2014. *Research Design: Pendekatan Kuantitatif dan Mixed*. Yogyakarta: Pustaka Pelajar.
- Cuoco, A., Goldenberg, E.P., & Mark, J. (1996). Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula. *Journal of Mathematical Behavior*, 15(4): 375-402.

- Healy, L., & Hoyles, C. 2000. A study of Proof Conceptions in Algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31: 396–428.
- Hoyles, C., & Kuchemann, D. 2002. Students' Understanding of Logical Implication. *Educational Studies in Mathematics*, 51: 93–223.
- Irpan, Samsul. 2009. *Proses Terjadinya Kesalahan dalam Penalaran Proporsional Berdasarkan Kerangka Kerja Asimilasi dan Akomodasi*. Tesis tidak diterbitkan. Malang: Universitas Negeri Malang.
- NCTM. 2000. *Principle and Standards for School Mathematics*. USA.
- Peretz, D. 2006. Enhancing Reasoning Attitudes of Prospective Elementary School Mathematics Teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education* (2006) 9:381–40.
- Sasman, M., Olivier, A., Linchevski, L. 1999. Factors influencing Students' Generalization Thinking Processes. In O. Zaslavski (Ed.). *Proceedings of the 23th International Conference for Psychology of Mathematics Education*. (Vol. 4, pp. 161–168). Haifa, Israel.
- Selden, J. & Selden, A. 1995. Unpacking the Logic of Mathematical Statements. *Educational Studies in Mathematics*, 29(2), 123–151.
- Slavin, R. E. 2006. *Educational Psychology: Theory and Practice*. Boston: Pearson Education, Inc.
- Stacey, K. 1989. Finding and Using Patterns in Linear Generalising Problems. *Educational Studies in Mathematics* 20(2), pp. 147–164.
- Subanji., dkk. 1993. *Identifikasi Jenis- Jenis Kesalahan Menyelesaikan Soal- Soal Matematika yang Dilakukan Peserta Didik Kelas II Program A1 SMA Negeri Kota Madya Malang Tahun Ajaran 1992/ 1993*. Laporan Hasil Penelitian tidak diterbitkan. Malang: Puslit IKIP Malang.
- Sugiyono. 2008. *Metode Penelitian Kuantitatif, Kualitatif dan R & D*. Bandung: Alfabeta.
- Säfström, A.I. 2013. *Exercising Mathematical Competence. Practising Representation Theory and Representing Mathematical Practice*. PhD thesis. Göteborgs Universitet. Göteborg.
- Thompson, D.R., Senk, S.L., & Johnson, G.J. (2012). Opportunities to Learn Reasoning and Proof in High School Mathematics Textbooks. *Journal for Research in Mathematics Education*, 43(3), 253–295
- Yaqin, M.H.A. 2011. *Diagnosis Kesulitan Siswa dalam Menhyederhanakan Pecahan Aljabar dan Upaya Mengatasinya dengan Menggunakan Scaffolding*. Tesis tidak diterbitkan. Malang: PPs UM.